京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

京都大学
KYOTO UNIVERSITY

Title	Imaginary Lagrangeanが現われる場合のFourier変換 (超函数と線型微分方程式 IV)
Author(s)	佐藤, 幹夫; 三輪, 哲二; 柏原, 正樹; 室, 政和
Citation	数理解析研究所講究録 (1975), 248: 212-260
Issue Date	1975-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/105675
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
248巻 1975年 212-260

Imaginary Lagrangean が現われる場合の Fourier 変換

名大理 柏原 正樹
京大数研 佐藤 幹夫
〃 三輪 哲二
京大・理 室 政和

§1 問題の説明

鈴木氏の講演で，概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換のほとんどが，micro local calculus によって決定されることが示された。その計算は，$f(x)^s$ あるいはそれの満たす holonomic system は micro local に考えると x_1^s とそれの満たす holonomic system にすぎない事に着目し，x_1^s の Fourier 変換という簡単な手続きを，T^*M 上で fiber 方向に総計する事によって求めたのであった。

その際，x_1^s を標準形とするのだから，計算に現われる Lagrangean が real であることが当然必要である。そうはならない最も簡単な例として $(x_1^2+\cdots+x_n^2)^s$ がある。しかし言うまでもなく，この場合は直接計算して

答は得られる。実は，もっと複雑な例においても，micro local な標準形として，$(x_1^2+\cdots+x_n^2)^s$ を持ってくれば 前と同様な手続きで 計算が遂行できる。その原理といくつかの例を与えてみたい。

§2 標準形と接続行列

$V_{\mathbb{R}}\times V_{\mathbb{R}}^*$ の一点を x_0^* とする。x_0^* を通る三つの Lagrangean $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2 \subset V\times V^*$ があり $\mathcal{M}=\mathcal{D}f^s$ を x_0^* の近くで考えた時 その support が $\Lambda_0\cup\Lambda_1\cup\Lambda_2$ にあるとしよう。

（仮定1） 実接触変換で $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ は次の標準形に変換される。

$$\Lambda_2 : \quad \xi_1=\cdots=\xi_\ell=x_{\ell+1}=\cdots=x_n=0$$

$$\Lambda_1 : \quad x_1^2+\cdots+x_\ell^2=0 \text{ の conormal}$$

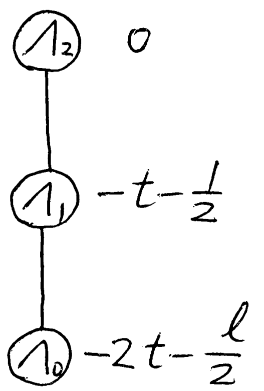
$$\Lambda_0 : \quad x_1=\cdots=x_\ell=x_{\ell+1}=\cdots=x_n=0$$

（仮定2） $\mathcal{M}$ は $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ で simple また交わりの generic point で symbol ideal が reduced とする。

(仮定3)
$$t = \mathrm{ord}_{\Lambda_2} f^s - \mathrm{ord}_{\Lambda_1} f^s - \frac{1}{2}$$
$$= \mathrm{ord}_{\Lambda_1} f^s - \mathrm{ord}_{\Lambda_0} f^s - \frac{\ell-1}{2}$$

この時, holonomic system $\mathcal{M}$ は x_0^* の近くで $g_\ell^t = (x_1^2+\cdots+x_\ell^2)^t$ の満たす holonomic system と一致する。

実際, g_ℓ^t の満たす方程式の support が (仮定1) の $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ になり, (仮定2) (仮定3) が満たされる事は明らかである。holonomy diagram で言えば

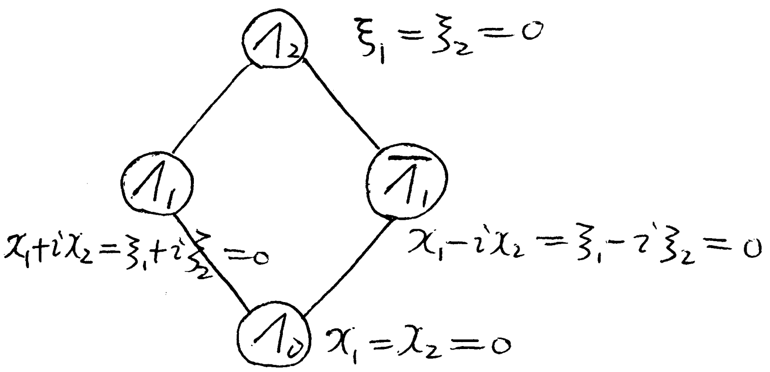


逆に, 仮定を満たす $\mathcal{D}f^s$ に対しては, 適当な分数階の楕円型擬微分作用素 Q で generator を取り換える事により $\mathrm{ord}_{\Lambda_2} Qf^s = 0$ とする事ができ, この時 (仮定3) から
$$\mathrm{ord}_{\Lambda_1} Qf^s = -t - \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{ord}_{\Lambda_0} Qf^s = -2t - \frac{\ell}{2}$$

となる。(仮定2)と orderについての情報から、$\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ の generic point 及び $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ の generic point での holonomic system の構造が決まってしまう。残る所は、$\dim \leqq n-2$ であるから 次の定理により 至る所決まってしまう。

定理(柏原) $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ が点 $x_0^* \in T^*X$ の近くで定義された holonomic system で $\dim S \leqq n-2$ なる集合 $S \subset T^*X$ を除いて $\mathcal{M}_1\big|_{T^*X-S} \cong \mathcal{M}_2\big|_{T^*X-S}$ ならば 実は至る所で $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$ である。

厳密に言うと $l=2$ は様子が異なる。holonomy diagram は



となる。この場合は、(仮定1)と(仮定2)だけから、方程式の標準形が $(x_1+ix_2)^{s_1}(x_1-ix_2)^{s_2}$ になる事がわかる。特に $s_1 \equiv s_2 \mod \mathbb{Z}$ なる場合は、

鈴木氏が取り扱った概均質ベクトル空間で，そこにおける係数体 $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}+i\mathbb{R}$ と思ってそれを複素化した時の相対不変式が $f^s\bar{f}^{s+l}$ $(s\in\mathbb{C},\ l\in\mathbb{Z})$ の場合の標準形であり，その場合の Fourier 変換は f^s についての結果から自動的に計算される事を注意しておく。$s_1=s_2$ となるのが，我々の今扱っている場合である。

次に，接続行列を求める。その方法は，数理研講究録として刊行された "Microlocal calculus と概均質ベクトル空間の相対不変式のFourier変換 （柏原－三輪）" （以下 [K-M] と略称する。）を modify すればよい。以下それを述べるが細かい点は上記を参照してほしい。

$$u=2^{\frac{n-l}{2}}(x_1^2+\cdots+x_l^2)^{-\frac{\lambda+l}{2}}\delta(x_{l+1})\cdots\delta(x_n).$$

の Principal symbol を計算すると，

$$\sigma_{\Lambda_2}(u)=(x_1^2+\cdots+x_l^2)^{-\frac{\lambda+l}{2}}\sqrt{\frac{dx_1\cdots dx_l\,d\xi_{l+1}\cdots d\xi_n}{dx_1\cdots dx_n}}$$

$$\sigma_{\Lambda_0}(u)=2^{-\lambda-\frac{l}{2}}\frac{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+l}{2})}\times$$

$$(\xi_1^2+\cdots+\xi_l^2)^{\frac{\lambda}{2}}\sqrt{\frac{d\xi_1\cdots d\xi_n}{dx_1\cdots dx_n}}$$

となる。これは、$(x_1^2+\cdots+x_l^2)^{-\frac{\lambda+l}{2}}$ の Fourier 変換を計算すればよい。(Gelfand - Silov; Generalized functions Vol.1 などにある)

さて標準型に直す前の Λ_0 Λ_2 において、そこで与えられた microfunction solution u_{Λ_0}, u_{Λ_2} が、ひと続きの solution となるための条件を求めてみる。

$\Lambda_0\cap\Lambda_2=S$ とし S の generic pt. s_1 の neighborhood で考える。以下単に Λ_0 Λ_2, S と書いたとき、それは、s_1 の nbd と Λ_0, Λ_2, S の intersection の意味であると了解されたい。

$\dim S=n-l$ である。Λ_0 上の函数 φ_0 で、次の条件をみたすものを作る。

i) $\varphi_0|_S=0$ かつ $d\varphi_0|_S=0$

ii) φ_0^{loc} を $\varphi_0(s+\varepsilon t)=\varepsilon^2\varphi_0^{loc}(s,t)+O(\varepsilon^3)$
$(s,t)\in T_S\Lambda_0$ によって $T_S\Lambda_0$ の函数として定義することができる。そして $O(l)$ は自然にこの normal bundle に作用している。すると φ_0^{loc} は t について2次式で $O(l)$ 相対不変。

同じくΛ_2上にφ_2をつくることができる。
すると$\varphi_0^{loc}, \varphi_2^{loc}$が、$S$の座標に関する、non-zero analytic function倍をのぞいて一意にきまることは、$Sp(l)$相対不変性より明らかである。

$(T_S\Lambda_0)\underset{S}{\times}(T_S\Lambda_2)$は$T_S\Lambda_0$の座標を$\{(S,\xi)\}$、$T_S\Lambda_2$の座標を$\{(S,x)\}$ととったとき、$\{(x,\xi)\}$は$2l$次元のsymplectic vector spaceと($s\in S$をfixしたとき)なるように、とることができる。

$\varphi_0^{loc}, \varphi_2^{loc}$は$T_S\Lambda_0$、$T_S\Lambda_2$上の函数であるが、

$$\begin{array}{ccc} & (T_S\Lambda_2)\underset{S}{\times}(T_S\Lambda_0)=(TS)^{\perp} & \\ \swarrow & & \searrow \\ T_S\Lambda_2 & & T_S\Lambda_0 \end{array}$$

のprojectionによって$(TS)^{\perp}$上にまでひきのばすことができる。

$$\tau_2 = 2^{-\frac{l}{2}}\frac{d\{x_1,\varphi_2^{loc}\}\wedge\cdots\wedge d\{x_l,\varphi_2^{loc}\}}{(\det\{x_i\{x_j,\varphi_2^{loc}\}\})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\tau_0 = 2^{-\frac{l}{2}}\frac{d\{\xi_1,\varphi_0^{loc}\}\wedge\cdots\wedge d\{\xi_l,\varphi_0^{loc}\}}{(\det\{\xi_i\{\xi_j,\varphi_0^{loc}\}\})^{\frac{1}{2}}}$$

ここで$\{\ ,\ \}$は(x,ξ) spaceのPoisson Bracket

と定義すれば、これは$\{(x,\xi)\}$というsymplectic座標のとり方にはよらない。

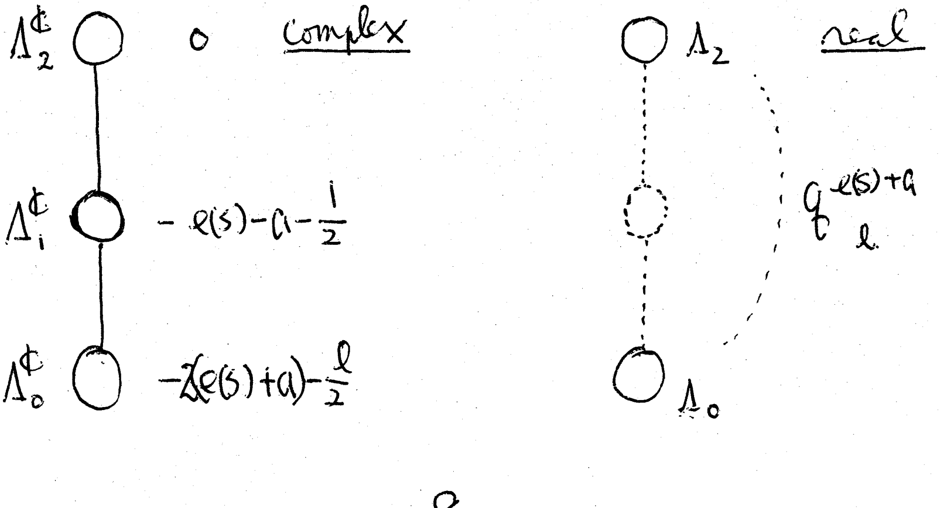
$$\psi : T_s\Lambda_2 \times_S T_s\Lambda_0 \hookrightarrow V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^*$$

を $s \in S$ にうつし、$T_s\Lambda_2$ を Λ_2 へ $T_s\Lambda_0$ を Λ_0 へうつす $(TS)^\perp$ の s の nbd で定義された、両方の space の symplectic structure が compatible な埋め込み写像であるとする。実際、これは仮定により存在する。

概均質ベクトル空間にあてはめて接触変換で不変な比をつくろう。

(G, V, f) を正則な概均質ベクトル空間で、相対不変式は一般には多数あるとする。記号は[K-M]にあわせる。

f^s のみたす holonomic system $\mathcal{D}f^s$ を T^*V にもちあげた $\mathcal{E}$-Module を $\mathcal{M}$ とし、その局所化として、次のような holonomy diagram をもつ2次型式があらわれたとする。



さて η を、S 上の $(n-l)$ form とし、次の比を考えると、これは有限な意味を持ち、接触変換や $\varphi_0, \varphi_2, x, \xi, \eta$、などのとり方には depend しない。

$$\sigma_{A_0}(u_{A_0})\,|\varphi_0|^{(-e(S)+a)+\frac{l}{2}} \exp\frac{\pi}{4}[\tau(\lambda,\lambda_{A_0},\mu)+\tau(\lambda_{A_0},\lambda_{A_2},\mu)]$$

$$\times \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(\xi_0)\wedge\eta}}\,\Bigg|_S$$

$$\vdots\ \sigma_{A_2}(u_{A_2})\,|\varphi_2|^{-(e(S)+a)}\left[\left|\frac{\{\varphi_0,\varphi_2\}}{2e(S)}\right|\right]^{-e(S)+a+\frac{l}{4}} \exp\frac{\pi}{4}\tau[\lambda,\lambda_{A_2},\mu]$$

$$\times \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(\xi_2)\wedge\eta}}\,\Bigg|_S$$

ただし、ここで [ ] 内の分母の $2e(S)$ は、

$$S_i = \langle A_i x, y\rangle/\delta x_i(A) \qquad \delta x_i(A_j) = 0 \quad i \neq j$$
$$\neq 0 \quad i = j$$

で定義された、W 上の函数である。また $V\times V^*$ の座標を (x, y) であらわしている。

∵) φ_0^{loc} φ_2^{loc} は S 上の non-zero analytic fcn 倍をのぞいてきまる。$\varphi_2'^{loc} = f\varphi_2^{loc}$ $f\in\mathcal{O}_S$ とするとき、$\varphi_2' = f\varphi_2 + \varphi_2''$ そして $\varphi_2''\equiv 0$ すなわち $\varphi_2' = f\varphi_2(1+\varphi_2''')$。$\varphi_2''$ は S 上 0 ととることができる。φ_2 のかわ

りに、φ_2'とおけば、比の右側は $f^{-(\ell(s)+a)}\, f^{\ell(s)+a+\frac{\ell}{4}}\left(f-\frac{\ell}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 倍されて変化なし。φ_2のとり方によらぬことも同様の考察で、わかる。

標準型の場合に、この比の値を計算してみよう。5ページの principal symbols において、$\lambda=-2(\ell(s)+a)-\ell$ を代入すればよい。Maslov index はすべてきえる。そして

$$\varphi_0 = \xi_1+\cdots+\xi_\ell^2 = y_1^2+\cdots+y_\ell^2$$

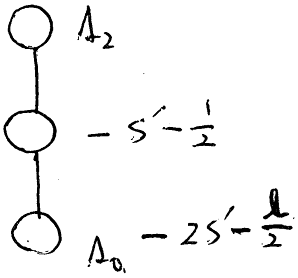
$$\varphi_2 = x_1^2+\cdots+x_\ell^2 \qquad \ell(s)=\langle x,\xi\rangle/2$$

とおけばよい。いずれも、標準型の場合 holonomic system 及び、holonomy diagram は

$$\langle Ax, D_x\rangle - s'\delta\chi(A)\, f^{s'} = 0$$

$$A \in \mathfrak{so}(\ell)$$

$$s' = \ell(s)+a$$



となることによってわかる。したがって求める比は

$$\frac{\Gamma(\ell(s)+a+\frac{\ell}{2})}{\Gamma(-\ell(s)-a)} : 1$$

となる。

さて再び、もとにもどって、$W\mathcal{E}$ の solution の Λ_2 における base として $\sigma_{\Lambda_2}(u_{\Lambda_2}) = \mathfrak{f}^S_{\Lambda_2}\sqrt{\omega_{\Lambda_2}}/\sqrt{dx}$
Λ_0 における base として、$\sigma_{\Lambda_0}(u_{\Lambda_0}) = \mathfrak{f}^S_{\Lambda_0}\sqrt{\omega_{\Lambda_0}}/\sqrt{dx}$
となるものをとる。

C_2 ; C_0 をどう取れば、$C_2 u_{\Lambda_2}$ と、$C_0 u_{\Lambda_0}$ とが、ひとつづきの solution となるかを知りたい。

$$\varphi_0 = \left(\mathfrak{f}^x_{\Lambda_0}\right)^{-\frac{1}{e(x)}} \qquad \mathfrak{f}^x_{\Lambda_0} = \mathfrak{f}^x / a^x_{\Lambda_0}(s)$$

$$\varphi_2 = \left(\mathfrak{f}^x_{\Lambda_2}\right)^{\frac{1}{e(x)}} \qquad \mathfrak{f}^x_{\Lambda_2} = \mathfrak{f}^x / a^x_{\Lambda_2}(s)$$

と、とることができる。 $a^x_{\Lambda_0}(s) = e(s)^{2e(x)} a^x_{\Lambda_2}(s)$ に注意して、

$$\{\varphi_0, \varphi_2\} = \left\{ e(s)^2 \left(\mathfrak{f}^x / a^x_{\Lambda_2}(s)\right)^{-\frac{1}{e(x)}}, \left(\mathfrak{f}^x / a^x_{\Lambda_2}(s)\right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}.$$

$$= \left(\mathfrak{f}^x / a^x_{\Lambda_2}(s)\right)^{-\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s)^2, \left(\mathfrak{f}^x / a^x_{\Lambda_2}(s)\right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}$$

$$= 2e(s) \left(\mathfrak{f}^x / a^x_{\Lambda_2}(s)\right)^{-\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s), \left(\mathfrak{f}^x / a^x_{\Lambda_2}(s)\right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}.$$

ここで、$e(s) = \sum_{i=1}^{k} a_i s_i$ となっているとすると、

$$\left\{ e(s), \left(\mathfrak{f}^x / a^x_{\Lambda_2}(s)\right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}.$$

$$= \left(\frac{1}{a_{\Lambda_2}^{x}(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s), (f^x)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{a_{\Lambda_2}^{x}(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \sum_{i=1}^{k} a_i \{ s_i, f^x \} \frac{1}{e(x)} (f^x)^{\frac{1}{e(x)} - 1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \left\{ \frac{\langle A_i x, y \rangle}{\delta x_i(A)}, f^x \right\} \frac{1}{e(x)} (f^x)^{-1} \left(f^x / a_{\Lambda_2}^{x}(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \nu_i f^x \right) \cdot \left(\frac{1}{e(x) f^x} \right) \left(f^x / a_{\Lambda_2}^{x}(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}}$$

したがって $\{ \varphi_0, \varphi_2 \} |_S = 2 e(s)$

以上の計算は、すべて S 上に制限して行ったものである。

次に

$$f_{\Lambda_0}^{s} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_0}}{dx}} \left| (f_{\Lambda_0}^{x})^{-\frac{1}{e(x)}} \right|^{e(s)+a) + \frac{l}{2}} \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(\xi_0) \wedge \eta}} \Bigg|_S$$

$$: f_{\Lambda_2}^{s} \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_2}}{dx}} \left| (f_{\Lambda_2}^{x})^{\frac{1}{e(x)}} \right|^{-(e(s)+a)} \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(\xi_2) \wedge \eta}} \Bigg|_S$$

が $1:1$ になることを示そう。

今 $\varphi_0 = (f_{\Lambda_0}^{x})^{-\frac{1}{e(x)}}$ $\varphi_2 = (f_{\Lambda_2}^{x})^{\frac{1}{e(x)}}$ とおく。

すると $f_{\Lambda_0}^{s} = f_{\Lambda_0}^{x\,s} = ((\varphi_0)^{-e(x)})^s = \varphi_0^{-e(s)}$

$$f_{A_2} = f_{\Lambda_2}^{\chi S} = \left(\left(\varphi_2\right)^{e(\chi)}\right)^{S} = \varphi_2^{e(S)}$$

したがって上の比は、

$$\sqrt{\omega_{\Lambda_0}}\,|\varphi_0|^{a+\frac{l}{2}}\left(\sqrt{\psi_*(\xi_0)\wedge\eta}\right)^{-1}\Big|_S$$

$$:\sqrt{\omega_{\Lambda_2}}\,|\varphi_2|^{-a}\left(\sqrt{\psi_*(\xi_2)\wedge\eta}\right)^{-1}\Big|_S.$$

これは正則函数(の絶対値)の比であるから、2乗して、ψ^{-1} でひきもどし、また φ_0, φ_2 は S 上3次以上で消える項は cut しても比には影響しない。

したがって以下 $T_S\Lambda_2 \times_S T_S\Lambda_0 / TS = (TS)^\perp$ 上に正準座標 $(x_1 \cdots x_l, \xi_1 \cdots \xi_l, s)$ (ただし s は S 上の座標である。)を入れて考える。

$\varphi_2 = \left(\left(f_{\Lambda_2}^{\chi}\right)^{\frac{1}{e(\chi)}}\right)^{loc}$ としてとると、これはうまい正準座標をとりなおし、かつ S 上の non zero analytic fcn. をかければ $\varphi_2 = x_1^2 + \cdots + x_l^2$ととることができる。なぜなら φ_2 は $SO(l)$ 相対不変であるから。

また $\widetilde{W} = \overline{\{(x, \operatorname{grad}\log\varphi_2^{s'})\,;\ s' \in \mathbb{C}\ \ x \in T_S\Lambda_2\}}$ と定義し $\widehat{\pi}$ を $\widehat{W} \to T_S\Lambda_2$ の projection map と

するとき、$\varphi_0^{-1} = \varphi_2 \circ \pi / c(s)^2 |_{T_S \Delta_0}$ とおくことができることは $f_{\Delta_0}, f_{\Delta_2}$ の定義より明らかである。そしてこれは、$\mathfrak{gl}(l)$ の $T_S \Delta_0 \wedge$ の反傾表現の、もとの表現と同じ character をもつ相対不変式であるから、φ_0 は $\varphi_0' = \xi_1 + \cdots + \xi_l^2$ の constant 倍である。その constant term は [K-H] と同じやり方で、

$$\varphi_2(x)\, \varphi_0'(\mathrm{grad} \log \varphi_2(x)) = 4$$

として計算することができる。

そこで $\varphi_2 = x_1^2 + \cdots + x_l^2$

$$\varphi_2 = 4\varphi_0' = 4(x_1^2 + \cdots + x_l^2)$$

を代入して、比を書きかえよう。

$$\omega_{\Delta_0} \cdot 4^{2(a+\frac{l}{4})} |\varphi_0'|^{2(a+\frac{l}{2})} (d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_l \wedge \eta)^{-1} \Big|_S$$

$$: \quad \omega_{\Delta_2} \quad |\varphi_2|^{-2a} \qquad (dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_l \wedge \eta)^{-1} \Big|_S.$$

一方 $\omega_{\Delta_2} |\varphi_2|^{-2a} = \mathrm{const}\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_l \wedge \eta$

$$\omega_{\Delta_0} |\varphi_0'|^{2(a+\frac{l}{2})} = \mathrm{const}\ d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_l \wedge \eta.$$

と書くことができて、両 constant term は $\omega_{\Delta_0} = \dfrac{\widetilde{\pi_*(\omega_{\Delta_2})} ds}{C(S)} \Big/ ds$ によって関連している。

さて上の比を S 上でくらべよう。

$$\widetilde{W} = \overline{\{(s' \operatorname{grad} \log \varphi_0'(\xi), \xi),\quad \xi \in T_s\Lambda_0\}}$$

と書けることに注意する。

$\widehat{C}$ をある constant として

$$\omega_{\Lambda_2} = \widehat{C}\ |\varphi_2|^{2a}\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_\ell \wedge \eta$$

$$\omega_{\Lambda_0} = \frac{\widetilde{\pi}_*(\omega_{\Lambda_2})\, ds'}{c(s')} \Big/ ds'$$

ここで、$c(s')$ とは、Λ_0 と Λ_2 の間の c 函数の factor で、$c(s') = s'^{(4a+\ell)}$ である。

$$|\varphi_0'|^{2(a+\frac{\ell}{2})}\ \omega_{\Lambda_0}$$

$$= |\varphi_0'|^{2(a+\frac{\ell}{2})}\ \frac{\widetilde{\pi}_*(\omega_{\Lambda_2}) \wedge ds'}{c(s')} \Big/ ds'$$

$$= \widehat{C}\ \varphi_0'^{2a}\ \varphi_2^{2a}\,(s' \operatorname{grad} \log \varphi_0')\ \varphi_0'^{\ell}\ \operatorname{Hess}(s' \log \varphi_0(\xi))$$

$$d\xi \wedge \eta \wedge ds' \,/\, c(s')\ ds$$

$$= \widehat{C}\ \varphi_0'^{2a}\,\varphi_2^{2a}(\operatorname{grad} \log \varphi_0')\ \varphi_0'^{\ell}\ \operatorname{Hess} \log \varphi_0'\ d\xi \wedge \eta$$

$$= \widehat{C}\quad 4^{2a}\ \ 2^{\ell}\ \ d\xi \wedge \eta.$$

したがって 比は $\widetilde{C} : \widehat{C} = 1 : 1$

ただし 以上の計算において $\varphi_0'^{s'}$ のみたす holo-

nomic system が $(\langle A\xi, D_\xi\rangle - s'\delta\chi'(A))\varphi_0'^{s'} = 0 \quad A \in \mathfrak{g}\mathfrak{o}(\ell)$
であることから $s' = \frac{\langle \xi, x\rangle}{2}$ として使っている。S_1 の
nbd では、W と $\widetilde{W}$ は同じものである。

以上により、$C_0 : C_2$ は求まった。

すなわち

$$C_0 : C_2 = \frac{\Gamma(\ell(s)+a+\frac{\ell}{2})}{\Gamma(-\ell(s)-a)} \exp\frac{\pi}{4}[-\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_0}, \mu) - \tau(\lambda_{\Lambda_0}, \lambda_{\Lambda_2}, \mu)$$
$$+ \tau(\lambda\, \lambda_{\Lambda_2}, \mu)] : 1$$

ここで $\exp\frac{\pi}{4}(\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_2}, \mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_2}, \lambda_{\Lambda_0}, \mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_0}, \lambda, \mu))$
は [K-M] P83 にあるのと全く同じ方法によって、

$$\exp\frac{\pi}{4}(\tau(\Lambda_2) - \tau(\Lambda_2 \cap \Lambda_0))$$

となる。ただし、

$$\tau(\Lambda_2) = \sqrt{-1}\ \underset{A\in\mathfrak{g}}{\mathrm{sgn}}\ (Ax_2, -{}^tAy_2)$$

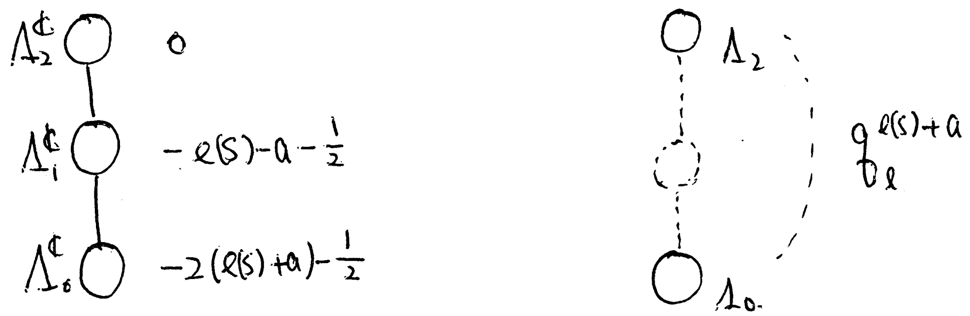
$$\tau(\Lambda_0 \cap \Lambda_2) = \sqrt{-1}\ \underset{A\in\mathfrak{g}}{\mathrm{sgn}}\ (Ax_0, -{}^tAy_2)$$

$(x_2, y_2) \cdots \Lambda_2$ の generic pot

(x_0, y_2) -- 交わりの generic pot.

結局 我々は、次のような公式を得る。

公式



complex holonomy diagram　　　　real holonomy diagram

右のような 2次型式 の holonomy diagram をもつとき その同伴数の比 $C_0 : C_2$ は

$$C_0 : C_2 = \left(-\frac{\sin \pi (e(S)+a)}{(e(S)+a)}\right) \Gamma(e(S)+a+1)\, \Gamma\left(e(S)+a+\frac{\ell}{2}\right) \exp \frac{\pi}{4}\left(\tau(\Delta_2)-\tau(\Delta_2 \cap \Delta_0)\right) : 1$$

§3 局所化の補題

§2の（仮定1）を判定しやすい条件で置き換えよう。以下，概均質ベクトル空間の場合に話を限る事として，$(\mathfrak{g}, V)$ を固定する。簡単のため相対不変式は1個の場合とする。それを $f(x)$ $x \in V$ とする。

$f(x)^s$ に対する holonomy diagram の一部分がより簡単な多項式の複素巾に対する holonomy diagram になっている事がある。§2では，それが2次形式になる場合を扱ったわけだが，ここでは一般の形で扱う。

$x_0 \in V$ x_0のG orbitの conormal bundle を Λ_0 としよう。x_0において Gx_0 に transversal な切り口を考え，$f(x)$ をその切り口に制限したものを $f(x)$ の Λ_0における localization といい（あるいは x_0における localization）$f^{loc}_{x_0}$ と書く。

(例) $G = GL(2) \times SO(3,1)$

$V = \{2行4列の \quad 行列\}$

作用 $G \ni (g_1, g_2)$

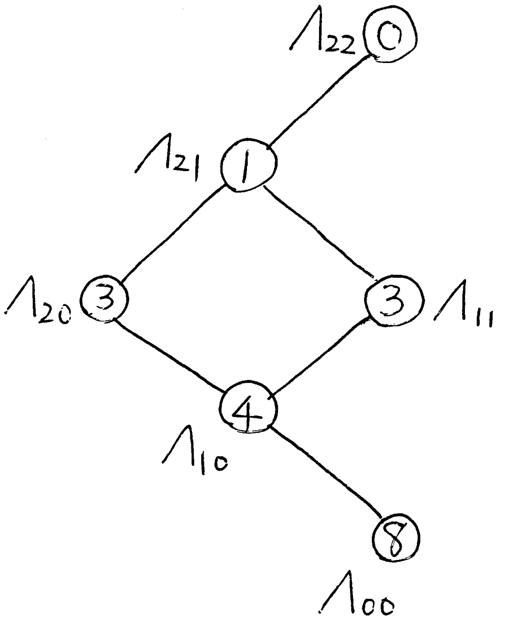
$V \ni x$

$\longmapsto g_1 x g_2^{-1}$

相対不変式 $f(x) = \det x J {}^t x$ $\quad J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

V の内積 $\langle x, y \rangle = \mathrm{tr}\, x J {}^t y$

holonomy diagram は次のようになる。



$\Lambda_{\mu\nu}$ は G orbit $\{x \in V / \operatorname{rank} x = \mu, \ \operatorname{rank} xJ\,{}^t x = \nu\}$ の conormal である。Λ_{10} における localization は次のように計算される。

代表点として $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を取る。

$$gl(2) \ni A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad so(3,1) \ni B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_5 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & b_6 \\ b_3 & b_5 & -b_6 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると tangent vector は $Ax_0 + x_0 B$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+b_6 & a_4+b_6 \end{pmatrix}$$

よって conormal vector は $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_3 \\ 0 & 0 & y_4 & y_4 \end{pmatrix}$

よって切り口として

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+x_4 \end{pmatrix}$$

が取れて，$f^{loc}_{x_0}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \det\begin{pmatrix} x_1^2+x_2^2+x_3^2 & x_3 \\ x_3 & -2x_4-x_4^2 \end{pmatrix}$

となる。あるいは，$-2x_4-x_4^2$ を新しく x_4 とおけば

$$f^{loc}_{x_0} = x_4(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - x_3^2$$

さらに $\sqrt{x_4-1}\,x_3$ を新しく x_3 とおけば，簡単になって

$$f^{loc}_{x_0} = x_3^2 + x_4(x_1^2+x_2^2)$$

となる。

Λ を diagram の中のひとつの holonomic set ㊍ とする時，Λ を親とする sub diagram とは Λ から codim 1 の交わりを伝っていける holonomic set の全体からなる diagram のことをいう。但し，ここで，codim が真に小さい向きにだけ伝っていく事が許されるとする。上の例でいえば Λ_{10} を親とする sub-diagram は Λ_{20}，Λ_{11}，Λ_{21}，Λ_{22} からなる。

㊍ Lagrangean の改名

次の事が成り立つ。

命題1. Λ における $f(x)$ の localization に対する holonomic diagram は Λ を親とする sub diagram と一致する。

$\because$) $\Lambda = T^*_{Gx_0}V$　$\dim Gx_0 = r$ とする。
この時 $^\exists A_1, \cdots, A_r \in \mathfrak{g}$ があって vector field $X_i = \langle A_i x, \mathrm{grad}_x \rangle$　$(i = 1, \cdots, r)$ は x_0 で独立であり，$f(x)$ を不変にする。$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ という座標を取る。この時 $f(x) = c(x) f(0, x_2, \cdots, x_n)$
また $X_2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ となった時 $\overset{\#}{c}$
$\widetilde{X}_2 = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} a_i(0, x') \frac{\partial}{\partial x_i}$ は $\widetilde{f}(x') = f(0, x_2, \cdots, x_n)$ を不変にする。よって r についての induction で証明される。

一般には，f^{loc} は，適当な概均質ベクトル空間の相対不変式になるとは限らない。例えば，上の例の多項式は，本質的に非有次である。しかし，特別な場合には，f^{loc} がより簡単な概均質ベクトル空間の相対不変式（の non zero 函数倍）になる事があり，その時には いろいろの計算が 簡略化される。その事を，もう少し一般の形で次に述べる。(*)

(*) P26の注意3)を見て下さい。

holonomy diagram 中の二つの holonomic set Λ_0, Λ_2 の交わりを S とする。S の generic point $p \in T^*V$ で考える。p を通る diagram の Λ_0, Λ_2 以外の holonomic set の全体を Λ_1, $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ とする。

(条件1) Λ_0, Λ_2 は p で non singular であり, $T_p S = T_p \Lambda_0 \cap T_p \Lambda_2$

以下 $p = (x_0, \xi_0)$ は $\xi_0 \neq 0$ とする。

$$J_\Lambda^{(1)} = \{ f(x, \xi) \in \mathcal{O}_{T^*X}(1) \,/\, f|_\Lambda = 0 \}$$

とする。$\mathcal{O}_{T^*X}(1)$ は ξ について斉次1次の函数を表わす。

f の Hamilton field を H_f と書く。

$$H_f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$$

$H_{J_\Lambda^{(1)}} = \{ H_f \,/\, f \in J_\Lambda^{(1)} \}$ は Lie algebra になる。

(条件2) $H_{J_\Lambda^{(1)}}$ は S に推移的に働く。

すなわち, S は $H_{J_\Lambda^{(1)}}$ 不変であり $\dim S = r$

とすると，$\dim\{df(p) \mid f \in \mathcal{J}_{\Lambda}^{(1)}\} = r$

$T_p(T^*V)$は simplectic vector space としての自然な内積を持つ。$T_pS \subset T_p(T^*V)$の直交補空間を$(T_pS)^{\perp}$とする。条件1より，

$$(T_pS)^{\perp} = (T_p\Lambda_0) + (T_p\Lambda_2)$$

であり，$(T_pS)^{\perp}/T_pS$ という simplectic vector space において $T_p\Lambda_0/T_pS$, $T_p\Lambda_2/T_pS$ は互いに dual な holonomic subspace となる。

一般に manifold X 上の vector field v が点 $p \in X$ で消えていれば（すなわち $v = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ で，$a_i(p) = 0$ $i = 1, \cdots, n$）v は T_pX に次のように作用する。

$$\begin{array}{ccc}
T_pX & \longrightarrow & T_pX \\
\Psi & & \Psi \\
\dfrac{\partial}{\partial x_j} & \longmapsto & \sum \dfrac{\partial a_i}{\partial x_j}(p)\dfrac{\partial}{\partial x_i} \\
\| & & \| \\
w & & [w, v](p)
\end{array}$$

今の場合 $\mathcal{J}_{\Lambda,p}^{(1)} = \{f \in \mathcal{J}_{\Lambda}^{(1)} \mid df(p) = 0\}$ とすると $f \in \mathcal{J}_{\Lambda,p}^{(1)}$ の時

H_f は $T_p(T^*X)$ に働く。さらに H_f は $T_p\Lambda_0$, $T_p\Lambda_2$, T_pS を不変にする。そこで

$$H : J^{(1)}_{\Lambda,p} \longrightarrow \mathrm{End}\left((T_pS)^\perp / T_pS\right)$$

の image を $\mathfrak{g}$ とする。

$$(T_pS)^\perp / T_pS = T_p\Lambda_0/T_pS + T_p\Lambda_2/T_pS$$

に対応する正準座標で $\mathfrak{g}$ を表現すると

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix}$$

となる。よって $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}(T_p\Lambda_0/T_pS)$ と考えてよい。

(条件3)　$\mathrm{End}(T_p\Lambda_0/T_pS)$ と考えて $\mathfrak{g} \ni I$

$f \in J^{(1)}_\Lambda$ を $df(p) = \omega(p)$ なるものとする。$\omega = \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i$ である。

$$H_f + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

を考えれば，これは p で消えるので $T_p(T^*V)$ に作用するが，$T_p\Lambda_0$, $T_p\Lambda_2$, T_pS を不変にするので $(T_pS)^\perp/T_pS$ に働く。

(条件4)　$\exists f \in J^{(1)}_\Lambda$　$df(p) = \omega(p)$ で

$$H_f + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA + I \end{pmatrix} \quad \text{in } \mathrm{End}((T_pS)^{\perp}/T_pS)$$
for some $A \in \mathfrak{g}$

以上の条件のもとで，適当な斉次正準変換によって

$$X = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{r-1} \times Y$$
$$\ni (t, w, x)$$

$$T^*X = \{(t, w, x; \tau, \zeta, \xi)\}$$

$$p = (0, 0, 0; 1, 0, 0)$$

$$\Lambda_0 = \{t = w = x = 0\}$$
$$\Lambda_2 = \{t = w = \xi = 0\}$$
$$\Lambda \subset \{t = w = 0 \quad \langle Ax, \xi\rangle = 0 \text{ for } A \in \mathfrak{g}\}$$

となる。（以上において $\mathbb{C}$ をすべて $\mathbb{R}$ で置き換えてもよい。）

概均質ベクトル空間の場合に，Lie algebra の言葉で以上の条件を述べてみよう。㊟

$\pi(\Lambda_0)$ の generic point を x_0 とする。

$\Lambda_0 = T^*_{Gx_0}V$ である。 x_0 における Gx_0 の tangent space は $\mathfrak{g}x_0$ であるから $(T^*_{Gx_0}V)_{x_0} = (\mathfrak{g}x_0)^{\perp}$ である。 これを $V^*_{x_0}$ と書く。

$\mathfrak{g}_{x_0} = \{A \in \mathfrak{g} \,/\, Ax_0 = 0\}$ とすると，

㊟ 数研講究録 225 の木村論文を参照して下さい。

$\mathfrak{g}_{x_0}$ は $V^*_{x_0}$ に作用している。$(\mathfrak{g}_{x_0}, V^*_{x_0})$ が概均質としよう。この時 $V^*_{x_0}$ の generic point を y_0，$\Lambda_2 \cap V^*_{x_0}$ の generic point を y_2 とする。

$\Lambda_0 = T^*_{Gy_0}V^*$ である。$\Lambda_2 = T^*_{Gy_2}V^*$ と仮定する。$(T^*_{Gy_0}V^*)_{y_2} = (\mathfrak{g}y_2)^\perp$ の generic point を x_2 とする。$p = (x_0, y_2)$ である。

$$T_{(x_0,y_2)}S = \mathfrak{g}(x_0, y_2)$$

$$T_{(x_0,y_2)}\Lambda_0 = \lim_{y_0 \to y_2} \mathfrak{g}(x_0, y_0)$$

$$T_{(x_0,y_2)}\Lambda_2 = \lim_{x_2 \to x_0} \mathfrak{g}(x_2, y_2)$$

であるから（条件1）は確められる。（条件2）は，この場合は満たされている。

P17における $(\mathfrak{g}, (T_pS)^\perp / T_pS)$ を求めてみよう。

$$\mathfrak{g}_{x_0y_2} = \{A \in \mathfrak{g} \,/\, Ax_0 = 0,\ Ay_2 = 0\}$$

が $J^{(1)}_{\Lambda,p}$ に相当する。⊛ $T_p\Lambda_0 / T_pS$ を考えよう。

x_0 の orbit の方向に動いても，物事はすべて推移的だから，x_0 を止めて考えてよい。よって

⊛ $J^{(1)}_\Lambda$ は $\{\langle Ax, y\rangle,\ A \in \mathfrak{g}\}$ から生成される。

$$(\overline{\mathfrak{g}_{x_0 y_2}}, T_p\Lambda_0/T_pS) \cong (\overline{\mathfrak{g}_{x_0 y_2}}, \mathfrak{g}_{x_0 y_0}/\mathfrak{g}_{x_0 y_2})$$

である。ここで上の棒線は，右側の空間に作用させた時の image を意味する。これから P17 の $\mathfrak{g}$ がわかり，条件3も確められる。

条件4は次のようにする。$A_1 \in \mathfrak{g}$ を

$$A_1 x_0 = 0 \quad , \quad -{}^tA_1 y_2 = -y_2$$ なるものとし，

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -{}^tA_1 + I \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(V \times V^*)$$

を $(T_p\Lambda_0/T_pS) + (T_p\Lambda_2/T_pS)$ に作用させた時

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA + I \end{pmatrix} \quad A \in \mathfrak{g}_{x_0 y_2}$$

の形をしている事を確めればよい。

さっきの例で以上の条件を確めてみよう。

$$\mathfrak{g} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_5 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & b_6 \\ b_3 & b_5 & -b_6 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{g}x_0 \ni Ax_0 + x_0B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+a_6 & a_4+a_6 \end{pmatrix}$$

よって $\mathfrak{g}_{x_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_4 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & -a_4 \\ b_2 & b_4 & -a_4 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathfrak{g}_{x_0} y_0 = -{}^tAy_0 + y_0B = \begin{pmatrix} -a_1 & b_1 & b_2-a_3 & b_2-a_3 \\ 0 & 0 & -2a_4 & -2a_4 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{g}_{x_0} y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 & -a_3 \\ 0 & 0 & -2a_4 & -2a_4 \end{pmatrix}$$

よって $\mathfrak{g}_{x_0y_2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_4 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & 0 \\ b_2 & b_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$(\overline{\mathfrak{g}_{x_0y_2}},\ \mathfrak{g}_{x_0}y_0/\mathfrak{g}_{x_0}y_2)$ は

$$\begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \cong \mathfrak{go}(2)$$

となる。よって条件3はよい。

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_4 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & \frac{1}{2} \\ b_2 & b_4 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，$-{}^tA_1$ の $\mathfrak{g}_{x_0}y_0/\mathfrak{g}_{x_0}y_2$ への作用は

$$\begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{g}_{y_2} x_2 / \mathfrak{g}_{y_2} x_0$ への A_1 の作用は

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

となるから，条件4もよい。条件1を見てみよう。

$$\mathfrak{g}(x_0, y_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+b_6 & a_4+b_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 & -a_3 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & -a_4+b_6 & -a_4+b_6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lim_{y_0 \to y_2} \mathfrak{g}(x_0, y_0)$$

$$= \lim_{t \to 0} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+b_6 & a_4+b_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_1 t & b_1 t & b_2 t - a_3 & b_3 t - a_3 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & -a_4+b_6 & -a_4+b_6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lim_{x_2 \to x_0} \mathfrak{g}(x_2, y_2)$$

$$= \lim_{t \to 0} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 t & b_1 t & b_2 t + a_2 & b_3 t + a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+b_6 & a_4+b_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 & -a_3 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & -a_4+b_6 & -a_4+b_6 \end{pmatrix} \right\}$$

これから明らかに成り立つ。

さて証明にはいろう。rについてのinductionによる。
$r \geqq 2$ の時は，$f \in J_{\Lambda}^{(1)}$ で $df(p) \# \omega(p)$ なるものがある。今 $p = (0, \cdots, 0; (0, \cdots, 1))$ とする。$\dfrac{f}{\xi_n}$ を考えると，これは0次homogeneousで，新しい正準座標系に移って

$$y_1 = \frac{f}{\xi_n}, y_2, \cdots, y_n; \eta_1, \cdots, \eta_n$$

とできる。この時 Λ, S は $H_{y_1} = -\dfrac{\partial}{\partial \eta_1}$ で不変である。よって (y_1, η_1) と $(y_2, \cdots, y_n; \eta_2, \cdots, \eta_n)$ に分解でき，条件1〜4は $T^*Y = \{(y_2, \cdots, y_n; \eta_2, \cdots, \eta_n)\}$ で成り立っている。

$r=1$の時は，$f \in J_{\Lambda}^{(1)}$ で $df(p) \neq 0$ なるものは $df(p) = \text{const}\,\omega(p)$ しかない。$df(p) = \omega(p)$ とする。条件4から，$g \in J_{\Lambda p}^{(1)}$ があって

$$H_{f-g} + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} : \circlearrowleft (T_pS)^{\perp}/T_pS$$

は㊉である。正準座標を $(x_1, \cdots, x_n; \xi_1, \cdots, \xi_n)$ とし $p = (0, \cdots, 0; 0, \cdots, 1)$ としよう。
$S = \{(0, \cdots, 0; 0, \cdots, \xi_n)\}$ である。
よって $(T_pS)^{\perp}/T_pS = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}; \xi_1, \cdots, \xi_{n-1})\}$

㊉ $\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix}$

接触多様体として考える事にし，$n-1$ を改めて n とし
座標を $(x_1, \cdots, x_n, t, p_1, \cdots, p_n)$ とする
$\omega = dt - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$ である。
$f-g$ を改めて（さらに0次斉次にして）$f(x,t,p)$
とする。この時上の条件から

$$f(x,t,p) = (1+\text{高次}) \times (t + 3\text{次以上})$$

となる。よって $t+3$次以上 を改めて f とする。
条件3から $\exists g \in J^{(1)}_{1,p}$ $\quad g = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \text{高次}$
今 $\alpha \in \mathbb{R}$ を generic とすると
大島：Singularities in contact geometry and degenerate pseudo-differential equations
J. Fac. Sci. Uni. Tokyo Sec. IA, Vol. 21, No. 1, pp. 43-83 の Theorem 2.16 により
適当な接触変換により

$$f + \alpha g = t + \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

とできる。再び，正準座標にもどって t の dual を τ と書く。
$(t, x; \tau, \xi)$ を使うわけである。

$$t\tau - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i \in J^{(1)}_{1}$$

がいえた。条件3から $\exists g_1 \in J^{(1)}_{1,p}$
g_1 は x, ξ, τ の函数で，(ξ, τ) につき1次斉次で

$$g_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i + \ x \text{につき2次以上}$$

となる。$J_\Lambda^{(1)}$はPoisson bracketで閉じているから $t\tau - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$ とのPoisson bracketを考えると，tを1次 τを-1次 x_iを$-\alpha^{-1}$次 ξ_iをα^{-1}次と考えて g_1の各同次成分が$J_\Lambda^{(1)}$にはいる。よって特にその0次同次成分 $\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$ が$J_\Lambda^{(1)}$にはいる。これから $t\tau \in J_\Lambda^{(1)}$ がいえた。また同時に $\sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i \in J_{\Lambda,p}^{(1)}$ でもある。従って$J_{\Lambda,p}^{(1)}$が Poisson bracketで閉じている事から，$J_{\Lambda,p}^{(1)}$は $\langle Ax, \xi \rangle$ の形の元から生成されている事もわかった。また，正準座標をうまく取って Λ_0，Λ_1が求める形にできる事も明らかである。

いくつか注意をしておく。

1) P 25の9行目で $\Lambda \subset \{\cdots\}$となって，等号でないのは f^s typeを考えても，sの値がb-函数の根と関連した特別な値においては，方程式のsupportのあるものが消える事が起こり得るのでこうなる。その場合$J_\Lambda^{(1)}$は大きくなるが，gはそのままになっている事もあり得るからである。

2) 条件3の代わりに，$\mathfrak{g} \ni$ 対角行列 $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-r} \end{pmatrix}$ $(a_i > 0)$ となる場合がある。

局所化した多項式が，weighted homogeneous の時がそれに当たる。この場合でも，同様に議論が進められる。但し，$J^{(1)}_{1,p}$ は今度は $\langle Ax, \xi \rangle$ の形の元とはならず，x, ξ に関し斉重なかつ ξ について1次のものからなる。そこで $\mathfrak{g}$ としてそれらに対応する vector field からできる Lie alg. を取れば，それが標準形として取れる。しかしそれは $\mathfrak{g}_{x_0 y_2}$ とは異なるから，何らかの方法でもとの $\mathfrak{g}$ から構成しなければならないが，その方法は知られていない。

3) Λ_2 が zero section の場合は，座標変換だけで話がすむ。$\mathfrak{g}_{x_0 y_2} = \mathfrak{g}_{x_0}$ の中に $\mathfrak{g}_{x_0} y_0 / \mathfrak{g}_{x_0} y_2 = \mathfrak{g}_{x_0} y_2$ に作用させた時，I が含まれるという事は，localization を不変にする vector field で

$$X = (x_1 + 高次)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n + 高次)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

のものが含まれるという事だから大島論文（前に引用したもの）の定理1.4（但し条件A.1.6. はミス・プリント $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i - \alpha_j \neq 0$ ではなく $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i - p_j \neq 0$）により，

座標変換で $X = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$ に直るから，localization は同次多項式に写り，それは $(\mathfrak{g}_{x_0}, \mathfrak{g}_{x_0}\eta_0)$ の相対不変式である。

4) 条件1は落とせる。まず，H_f が $(T_pS)^\perp$ を不変にする事がわかる。それには，S が H_f 不変な事，$f|_S = 0$ な事から，例えば S を標準形 $\{x_1 = \cdots = x_n = \xi_1 = \cdots = \xi_r = 0\}$ に変換して考えればよい。$(T_pS)^\perp / T_pS$ と $T_p\Lambda_0/T_pS$ だけを使って $T_p\Lambda_2/T_pS$ を使わずに話を進める事ができて $t\tau - \alpha\sum_{i=1}^n x_i\xi_i \in J_\Lambda^{(1)}$ が言える。よってこれに対応する斉重な部分を考えると，

$$A \in \mathfrak{g} \subset \mathrm{End}\,(T_p\Lambda_0/T_pS)$$

ならば $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \subset \mathrm{End}((T_pS)^\perp/T_pS)$

である事がわかる。よって

$$\Lambda_0 = \{t = w = x = 0\}$$
$$\Lambda \subset \{t = w = 0,\ \langle Ax, \xi\rangle = 0 \text{ for } A \in \mathfrak{g}\}$$

とできる事は正しい。

§4 例

1) $\mathbb{H}$上のn次の skew hermitian 行列

$GL(2n, \mathbb{C})$ を考える。実形として次に説明するよう

なものを取る。$\mathbb{H}$を四元数とする。

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}j = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$$

$$(k = ij)$$

である。

$$\mathbb{H} \ni \alpha + \beta j \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$$

と表現する事ができる。さらに

$$\iota : M(n, \mathbb{H}) \longrightarrow M(2n, \mathbb{C})$$

が明らかなやり方で定義され，$M(n, \mathbb{H})^{\mathbb{C}}$ を考えれば同型になる。$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = M(n, \mathbb{H})$ とする。

$$V_{\mathbb{R}} = M(n, \mathbb{H} \; ; \; X = -{}^t\overline{X}) \text{ とする。}$$

$$\begin{array}{cccc} \tau : & V_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & M(2n, \mathbb{C} \; ; \; X = {}^tX) \\ & \psi & & \psi \\ & X & \longmapsto & \iota(Xj) \end{array}$$

が well defined で，$(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ に移れば同型である。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & V_{\mathbb{R}} \\ \Psi & & \Psi \\ (A, X) & \longmapsto & AX + X\,{}^t\bar{A} \end{array}$$

という作用で，$(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$ は pre homogeneous space になる。その複素化は $GL(2n, \mathbb{C})$ である。

$V_{\mathbb{R}}$ の相対不変式は $f(X) = \det \iota(Xj)$

$\text{degree}\, f = 2n$

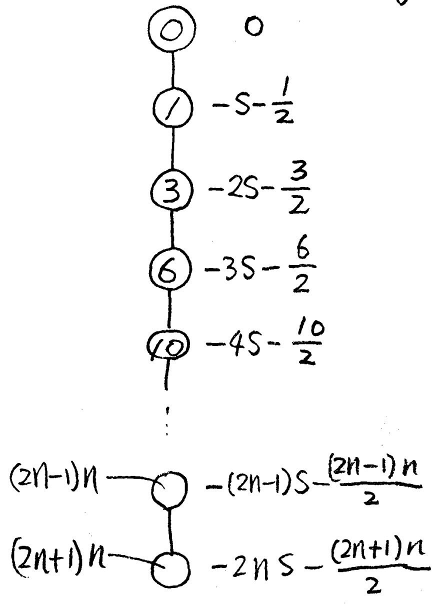
$V_{\mathbb{R}}$ の内積を $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\, X\,{}^t\bar{Y} = -\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\, XY$

とする。$(V_{\mathbb{R}})^*$ の相対不変式は，$f^*(Y) = \det \iota(Yj)$

で同じである。

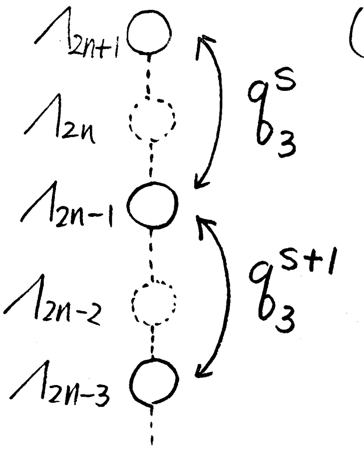
$|C_0| = 4^n \quad |C_1| = 2^{2n^2+n} \quad \deg f = 2n,\ \dim V_{\mathbb{R}} = 2n^2+n$

complex holonomy diagram は 左図。



real な diagram は，ひとつおきに real locus が現われ，それは連結である。よって 次の頁の図のようになる。そこで q は P3で定義した記号で，三つ組の標準形がどんな2次形式になるかを表わす。右側に書いたのは，$\Lambda_{奇数}$ 及び $\Lambda_{奇数} \cap \Lambda_{奇数-2}$ の generic point である。

Λ 奇数の gen. pt.　　　交わりの gen. pt.



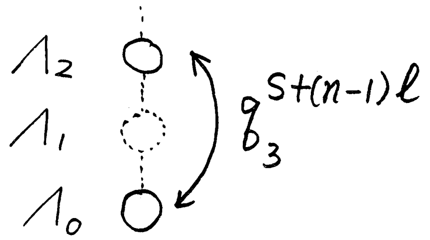
$$(x,y)=\begin{pmatrix} i & & \\ & \ddots & \\ & & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & & & \\ & \ddots & & \\ & & i & \\ & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & & & \\ & \ddots & & \\ & & i & \\ & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & i & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & i & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & i & \\ & & & & i\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} i & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & i & & \\ & & \ddots & \\ & & & i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & i & & \\ & & \ddots & \\ & & & i\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & & \\ & \ddots & \\ & & i\end{pmatrix}$$

Maslov index は計算すると消えてしまう。

よって　$u(s)=|f(X)|^{s}$

$$u^{*}(s)=\int_{V^{*}}|f^{*}(Y)|^{-s}e^{-2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,XY}\,dY$$

但し　$dY=\prod_{l=1,\cdots,n} dy_l^{(i)}dy_l^{(j)}dy_l^{(k)}\prod_{l>l'} dy_{ll'}^{(1)}dy_{ll'}^{(i)}dy_{ll'}^{(j)}dy_{ll'}^{(k)}$

$$Y=\begin{pmatrix} y_1^{(i)}i+y_1^{(j)}j+y_1^{(k)}k & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{21}^{(1)}+y_{21}^{(i)}i+y_{21}^{(j)}j+y_{21}^{(k)}k & \cdot & & \\ \vdots & & \cdot & \\ & & & \cdot \end{pmatrix}$$

とすれば，鈴木氏の講演における公式に当てはめて

$$u(s) = (2\pi)^{-2ns-\frac{2n^2+n}{2}} 2^{2ns} 2^{\frac{2n^2+n}{2}}$$

$$\times \frac{\Gamma(s+\frac{3}{2})}{\Gamma(-s)} \cdot \frac{\Gamma(s+\frac{5}{2})}{\Gamma(-s-1)} \cdot \cdots \cdot \frac{\Gamma(s+\frac{2n+1}{2})}{\Gamma(-s-n+1)} u^*(s+\frac{2n+1}{2})$$

$$= \pi^{-2ns-\frac{2n^2+n}{2}} \frac{\Gamma(s+\frac{3}{2})}{\Gamma(-s)} \cdot \frac{\Gamma(s+\frac{5}{2})}{\Gamma(-s-1)} \cdots \frac{\Gamma(s+\frac{2n+1}{2})}{\Gamma(-s-n+1)} u^*(s+\frac{2n+1}{2})$$

すなわちきちんと書くと次のようになる。

$$|f(X)|^s = \pi^{-2ns-\frac{2n^2+n}{2}} \prod_{j=1}^{2n} \Gamma\left(s+\frac{j+1}{2}\right) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\sin \pi(s+i)}{\pi}\right)$$

$$\int |f^*(Y)|^{-s} e^{-2\pi\sqrt{-1}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\,XY}\, dY$$

2) 演習問題

$$g_{\mathbb{R}} = M(n,\mathbb{H}) \times M(n,\mathbb{H})$$

$$V_{\mathbb{R}} = M(n,\mathbb{H})$$

$$\begin{array}{ccc} g_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & V_{\mathbb{R}} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (A,B,X) & \longmapsto & AX{}^tB \end{array}$$

で prehomogeneous である。相対不変式は $\det L(X)$。この場合も一直線のグラフとなるからやさしい。

3) $G_{\mathbb{R}} = GL(n, \mathbb{R}) \times SO(p, q)_0$。

$SO(p,q)_0$ は $SO(p,q)$ の連結成分。$p+q=m$ とし，$n<m$ と仮定する。（そうでないと相対不変式が既約でない。）

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{so}(p, q)$$

$$V_{\mathbb{R}} = \{ n \times m \text{ 実行列} \}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & V_{\mathbb{R}} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ (A, B, X) & \longmapsto & AX - XB \end{array}$$

で prehomogeneous となる。

相対不変式は $f(X) = \det X J {}^t X$

但し $J = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \cdots \ 1}^{p\text{個}} & \\ & \overbrace{-1 \ \cdots \ -1}^{q\text{個}} \end{pmatrix}$

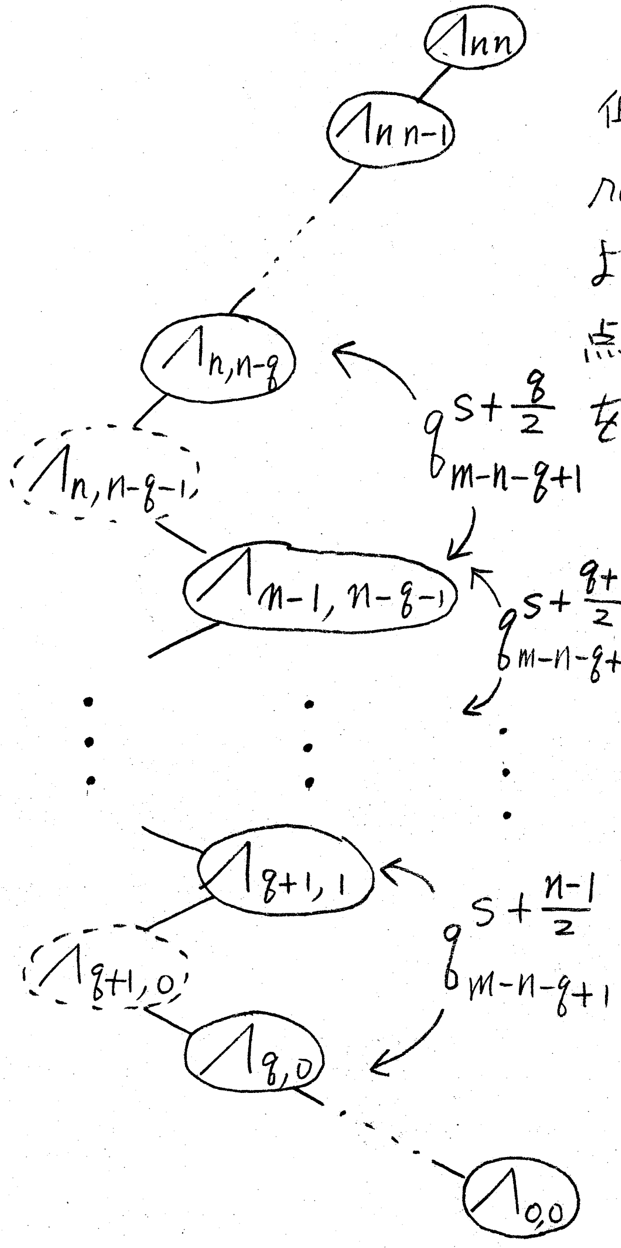
内積を $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}\, X {}^t Y$ とする。

V^* の相対不変式は $f^*(Y) = \det(Y J {}^t Y)$

$|c_0| = 4^n \quad |c_1| = 2^{mn}$ である。

$p, q \geqq n$ の時は，real locus が計算を可能にするだけ充分あり，鈴木氏によって計算された。ここでは $q = 0$，$p > n$ の場合と $q = 1$，$p > n$ の場合を扱う。（$n \geqq 2$ とする。）

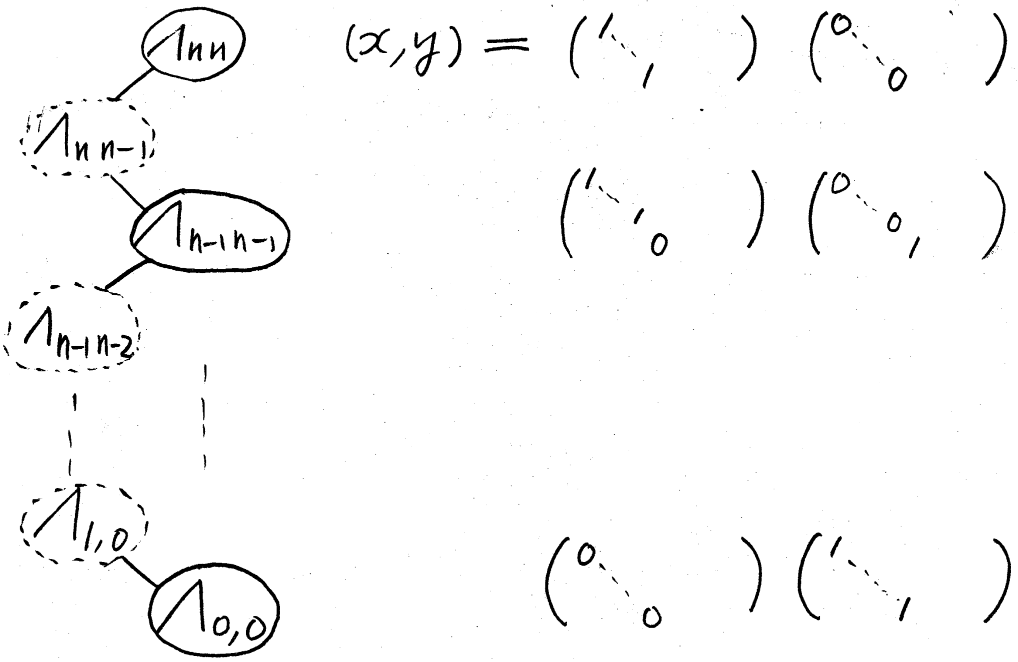
一般に $p > n$ とすると，次のような部分グラフがある。



但し $\Lambda_{\nu\mu}$ は $\mathrm{rank}\, X = \nu$，$\mathrm{rank}\, XJ^tX = \mu$ であるような G orbit の conormal

点線のものは real locus を持たない。そこの三つ組はやはり2次形式になる。これは complex の図で real locus はもっと複雑になっている。

i) $q=0$ の時　この時は real locus は連結成分がひとつであって例1)や例2)と同じで簡単である。Λ の generic point のみ記して，あとは演習問題とする。答合わせは 佐藤-新谷 概均質ベクトル空間の理論 数学の歩み 15-1 P155 例19 を見て下さい。



ii) $q=1$ の時

これの一番簡単な場合が P11 で紹介した例である。その場合について, real holonomy diagram を書いてみよう。まず各 $\Lambda_{\nu\mu}$ の連結成分を示す。

Λ_{22}　$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$　　$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$

⊕ —————— ⊖

Λ_{21} $\begin{pmatrix}1000\\0101\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0000\\0101\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1000\\0101\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\ 0\ 0\ 0\\0\ {-1}\ 0\ {-1}\end{pmatrix}$

$\oplus$ ——————— $\ominus$

Λ_{11}

$\begin{pmatrix}0001\\0000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0000\\1000\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1000\\0000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0000\\0100\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1000\\0000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0000\\0001\end{pmatrix}$

Ⓐ ——————— Ⓑ ——————— Ⓒ

Λ_{10} $\begin{pmatrix}1001\\0000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1001\\0100\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1\ 0\ 0\ {-1}\\0\ 0\ 0\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1001\\0100\end{pmatrix}$

$\oplus$ ——————— $\ominus$

Λ_{00} $\begin{pmatrix}\ 0\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1000\\0100\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\ 0\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1000\\0001\end{pmatrix}$

$\oplus$ ——————— $\ominus$

次に二つずつの交わりを書こう。

Λ_{22}とΛ_{21}

$\Lambda_{21}\ominus$ $\begin{pmatrix}1000\\0101\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\ 0\ 0\ 0\\0\ {-\varepsilon}\ 0\ {-\varepsilon}\end{pmatrix}$

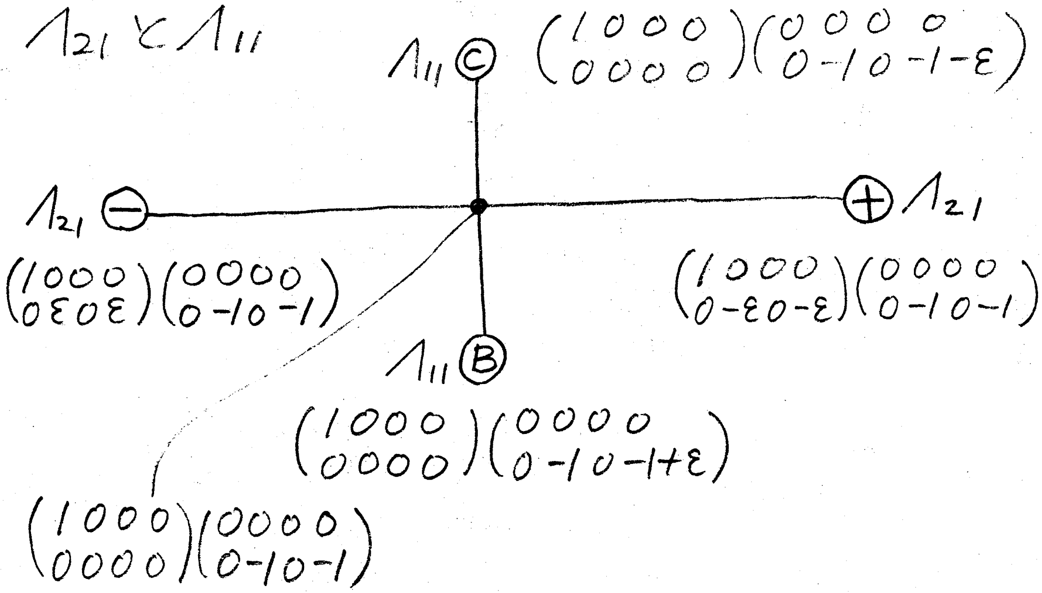
Λ_{22} $\ominus$ ——————— • ——————— $\oplus$ Λ_{22}

$\begin{pmatrix}1\ 0\ 0\ 0\\0\ 1\ 0\ 1{+}\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ 0\ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\ 0\ 0\ 0\\0\ 1\ 0\ 1{-}\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ 0\ \end{pmatrix}$

$\Lambda_{21}\oplus$ $\begin{pmatrix}1000\\0101\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\ 0\ 0\ 0\\0\ \varepsilon\ 0\ \varepsilon\end{pmatrix}$

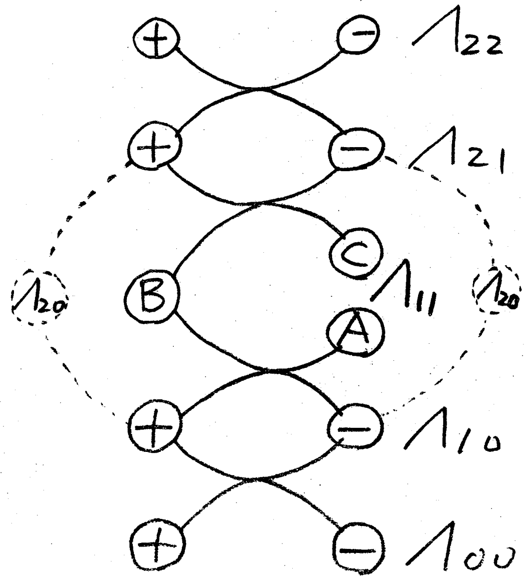
$\begin{pmatrix}1000\\0101\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ 0\ \end{pmatrix}$

Λ_{21} と Λ_{11}



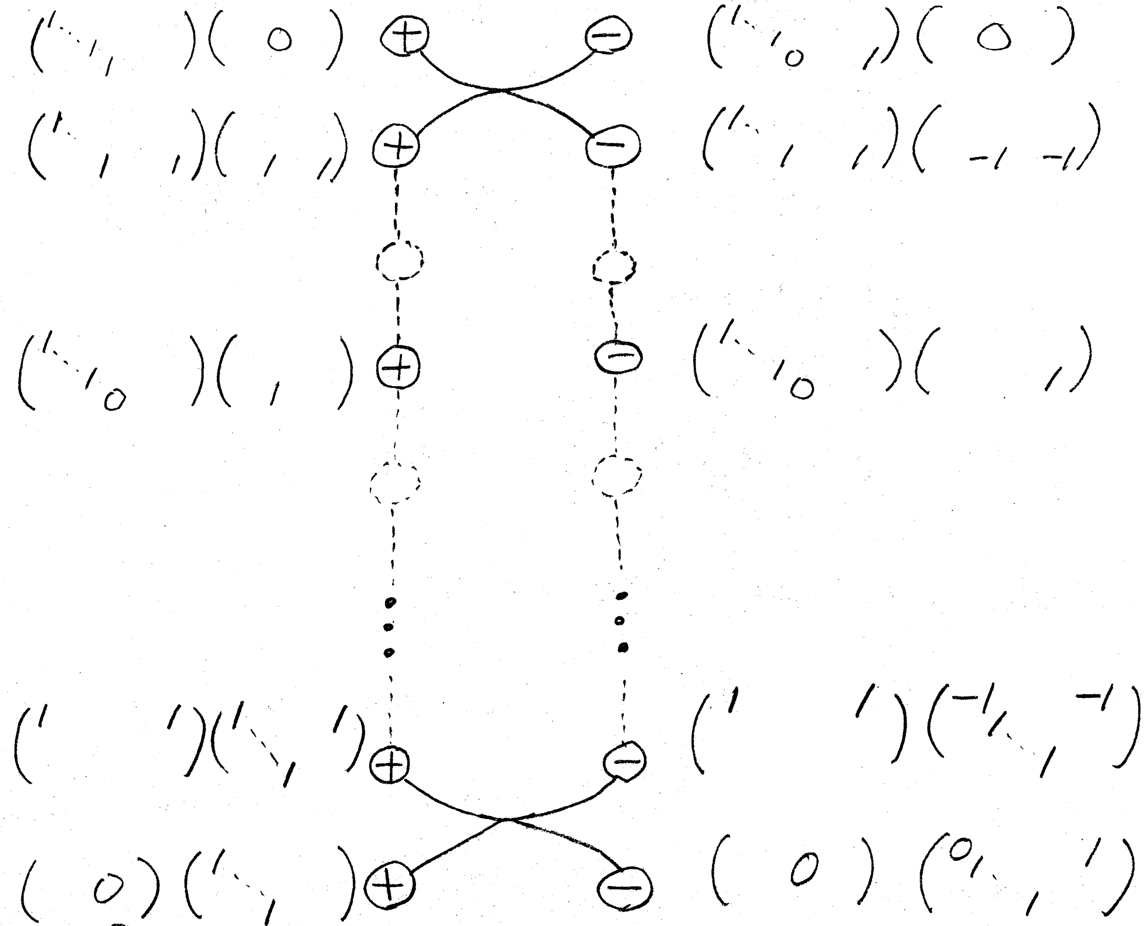
Λ_{11} と Λ_{10}, Λ_{10} と Λ_{00} は上記と同じ（x と y が逆になるだけ）なので省く。

全体の図は 次のようになる。



よってこの道筋で Fourier 変換を計算する事はできない。しかし図の点線で示したものは，2次形式の三つ組 となる

ので，Λ_{21} から Λ_{10} へ by-pass する事によって計算が実行できる。2行4列に限らず，一般の場合にも次の道筋で計算される。



結果は次の通り

$$u_{\pm}(s) = \begin{cases} |f(X)|^{s} & X \in \Lambda_{nn\pm} \\ 0 & X \in \Lambda_{nn\mp} \end{cases}$$

$$u^{*}_{\pm}(s) = \int_{\Lambda_{00\pm}} |f^{*}(Y)|^{-s} e^{\sqrt{-1}\,\mathrm{Tr}\,X\,{}^{t}Y} dY$$

$$\begin{bmatrix} U_+(s) \\ U_-(s) \end{bmatrix} = (2\pi)^{-\frac{nm}{2}} (4^n)^s \sqrt{2^{nm}} \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+s+j\right)}{\Gamma\left(-s-\frac{1}{2}j\right)}$$

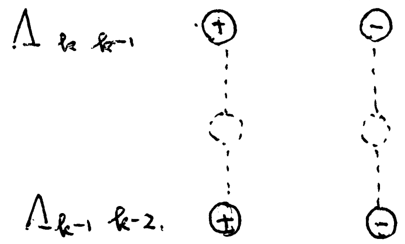
$$\frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma\left(s+\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{-1})^{1-n} (a^{-4}-a^{4})$$

$$\times \begin{bmatrix} (a^{-2}+(-1)^n a^2) & (\sqrt{-1})^m (1+(-1)^{m+n}) \\ -(1+(-1)^n) & -(\sqrt{-1})^m (a^2+(-1)^{m+n} a^{-2}) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} U^*_+\left(s+\frac{m}{2}\right) \\ U^*_-\left(s+\frac{m}{2}\right) \end{bmatrix}$$

ここで　$a = \exp \frac{\pi\sqrt{-1}}{2} s$　である。

Maslov index の修正を書いておこう。



左側の修正の term

$$= \tau(\Lambda^+_{k\,k-1}) - \tau(\Lambda^+_{k\,k-1} \cap \Lambda^+_{k-1\,k-2})$$

$$= \exp \frac{\pi\sqrt{-1}}{4}$$

右側は　$\exp -\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}$

最初の余次元1のまじわりでは修正の termはでない。

最後の余次元1のまじわりでは $\begin{bmatrix} \exp\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(m-n-1) & \\ & \exp-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}(m-n-1) \end{bmatrix}$

C_0, C_1 の計算に関する Remark

(G, V, f) を Prehomogeneous vector space とする。
V^* を V の dual space として内積を $\langle x, y \rangle$ とする。
するとこの内積に関して反傾表現ができる。その表現に対する相対不変式を f^* とする。すなわち

$$f(gx) = \chi(g)\, f(x)$$
$$f^*({}^t g^{-1} y) = \chi^{-1}(g)\, f(y)$$

このとき f^* は constant 倍をのぞいて unique にきまる。
同じように、G の Lie algebra $\mathfrak{g}$ の V^* への作用に対し tr_{V^*} を character にもつ V^* 上の volume element も一意にきまる。C_0 C_1 の値は f f^* の constant 倍, V, V^* 上の相対不変 volume の constant 倍によってきまるのであって、内積のとり方にはよらない。

内積が $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ という通常の内積の場合は、

$$C_0 = f^*(y)\, f(\mathrm{grad} \log f^*(y))$$
$$C_1 = f^*(y)^{\frac{2n}{r}}\, \mathrm{Hess} \log f^*(y)$$

として求めることができる。

Aを非退化行列 $(x,Y)=\langle x,AY\rangle$ として内積を定義する。通常の内積とするためには、$y=AY$ と変数変換してやらねばならぬ。$\langle x,y\rangle$ の内積に関する相対不変式を $f^*(y)$ とする。相対不変な volume element (tr_{V^*} に対する) は dy である。

(x,Y) の内積をとったときには、相対不変式は

$$\tilde{f}^*(Y)=f^*(AY)$$

相対不変 volume element は dY でよい。

$\tilde{f}^*$ をつかって C_0 C_1 を表わすとすれば、

i) $C_0=\tilde{f}^*(Y)\,f(\mathrm{grad}_Y A^{-1}\log\tilde{f}^*(Y))$

ii) $C_1=\tilde{f}^*(Y)^{\frac{2n}{r}}\,\mathrm{Hess}_Y\log\tilde{f}^*(Y)\,(\det A)^{-1}$

として求めることができる。

$\because$) 求め方を反省すればよい。通常の内積では

$$W=\overline{\{(\mathrm{grad}\log f^{*s}(y),\,y)\ ;\ y\in V^*\ s\in\mathbb{C}\}}$$

と書くことができる。$y=AY$ とかえたときには、

$$W=\overline{\{(\mathrm{grad}_y\log\tilde{f}^*(A^{-1}y),\,Y)\}}$$

$$= \overline{\{ (\mathrm{grad}_Y A^{-1} \hat{f}^{*s}(A^{-1}y), Y) ; Y \in V^* \}}$$
$$= \overline{\{ (\mathrm{grad}_Y A^{-1} \hat{f}^{*s}(Y), Y) ; Y \in V^* \}}$$

したがって、$\Lambda = 0 \times V^*$ として $f_\Lambda = C_0 \hat{f}^{*-1}(Y)$ の C_0 を求めるのであるから、

$$C_0 = f(\mathrm{grad}_Y A^{-1} \hat{f}^{*s}(Y)) \, \hat{f}^*(Y) \Big/ a_\Lambda(s)$$
$$= \hat{f}^*(Y) \, f(\mathrm{grad}_Y A^{-1} \hat{f}^*(Y)).$$

また $\omega_\Lambda = C_1 \hat{f}^{*-2\frac{n}{r}}(Y)\, dY$ の C_1 を求めるのであるから $\omega_\Lambda = \dfrac{\pi_*(dx) \wedge ds}{C_\Lambda(s)} \Big/ ds \Big|_\Lambda$ に注意して、

$$\pi_*(dx) \wedge ds = d(\mathrm{grad}_Y A^{-1} \log \hat{f}^{*s}(Y)) \wedge ds$$
$$= \mathrm{Hess}_Y \log \hat{f}^{s*}(Y) \det A^{-1} dY \wedge ds$$

すなわち $\omega_\Lambda = \mathrm{Hess}_Y \log \hat{f}^*(Y) (\det A)^{-1} dY = C_1 \hat{f}^{*-\frac{2n}{r}}(Y)\, dY$

したがって $C_1 = \hat{f}^{*\frac{2n}{r}}(Y) \, \mathrm{Hess}_Y \log \hat{f}^*(Y) (\det A)^{-1}$

なお [K-M] の P67～P68 を参照のこと。

ひとつComentをしておく。

$\mathrm{grad}_Y A^{-1}$とは、$\mathrm{grad}_Y A^{-1} \exp(x,Y) = {}^t x \exp(x,Y)$となるように定義される。一般に、内積$(x,y)$が与えられたとき、$\mathrm{Grad}_y$を、

$$\mathrm{Grad}_y \exp(x,y) = {}^t x \exp(x,y)$$

となる一階のyに関する微分作用素のベクトルとするとき、

$$\overline{W} = \overline{\{ (s\,\mathrm{Grad}_y f^*(y),\ y)\ ;\ y \in V^*\ s \in \mathbb{C} \}}$$

と定義することができる。

付記

ここに説明された方法によって、完全な解決をみた計算、そのあと発見された計算の簡略化などは、このあと刊行される"代数解析学の諸問題"の講究録中の、室政和："Prehomogeneous vector spaceの相対不変式のFourier変換について"に詳述してある。興味のある方は参照してください。